

DOI: <https://doi.org/10.17816/gc623518>

Динамика популяций глобально связанных осцилляторов с распределёнными фазовыми сдвигами

Л.А. Смирнов^{1*}, А.С. Пиковский²

¹ Институт информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация;

² Department of Physics and Astronomy, University of Potsdam, University of Potsdam, Гольм (Потсдам), Германия

АННОТАЦИЯ

Популяции глобально связанных осцилляторов являются базовыми моделями при изучении процессов синхронизации и возникновения коллективных мод. Во многих случаях глобальный характер связи определяется непосредственно свойствами рассматриваемой системы. Однако осцилляторы, входящие в состав ансамбля, могут иметь разные по величине параметры, а также находиться под воздействием внешних шумов, что приводит к неидентичности взаимодействующих элементов. Наиболее распространённым источником такой неидентичности является разброс в собственных частотах осцилляторов. Эффекты, к которым приводит такого рода беспорядок в системе, на данный момент уже достаточно детально рассмотрены. В представленном исследовании проанализировано влияние различия в фазовых сдвигах в связи. Данные фазовые задержки естественным образом возникают там, где сформированный средним полем сигнал должен распространяться, чтобы достичь пространственно распределённых элементов, принадлежащих популяции.

Во-первых, в качестве примера была построена фазовая модель в форме Курамото–Сакагучи для ансамбля квадратичных нейронов типа «накопление–сброс», рекуррентно связанных друг с другом посредством синаптического тока, приходящего на отдельно взятые клетки с разными сдвигами по времени, т.е. когда каждый нейрон получает стимул от других клеток ансамбля со своей собственной задержкой. С математической точки зрения в такой ситуации глобальная сила действует на различные осцилляторы с распределённым временным запаздыванием, что в итоге приводит к разбросу по параметру Сакагучи в соответствующей фазовой модели. Отметим, что при её выводе предполагалось слабое взаимодействие между элементами системы, был осуществлён переход к медленно меняющимся фазам и использована стандартная процедура усреднения.

Во-вторых, в работе показано, что распределение фазовых сдвигов в связи может возникать и из-за неидентичности локальных свойств осцилляторов, в частности когда взаимодействие нейронов осуществляется через глобально усреднённое с учётом «фильтрации низких частот» синаптическое поле. Для этого нами была рассмотрена каноническая модель θ -нейрона, традиционно используемая при анализе коллективной динамики популяции нейронов, которые демонстрируют в своем поведении переход, описываемый нормальной формой седло-узловой бифуркации. Здесь, как и в предыдущем случае, предполагается, что нейроны глобально связаны между собой химическими синапсами, однако для соответствующего синаптического тока принимаются во внимание релаксационные процессы, которые для каждого нейрона протекают со своей скоростью. В этой ситуации, аналогичным образом считая характер взаимодействия слабым и используя асимптотический метод во многих временных масштабах, авторы получили модель Курамото–Сакагучи для ансамбля фазовых осцилляторов с распределёнными фазовыми задержками.

Далее были проанализированы свойства фазовой модели. В термодинамическом пределе исследуемую модель можно охарактеризовать одночастичной плотностью вероятности, которая эволюционирует согласно уравнению непрерывности и имеет точное решение в виде анзаца Отта–Антонсена при каждом значении фазового сдвига α . Это многообразие является притягивающим (как показано в других работах) и соответствует специальному представлению для разложения в ряд Фурье по фазовой переменной в виде ядра Пуассона. С помощью данного аналитического подхода получено низкоразмерное описание коллективного поведения соответствующей системы, где в сами уравнения для макроскопических комплексных полей значение фазовых сдвигов α не входит, и только переопределённый параметр порядка $Q(t, \alpha)$ зависит от α через начальные условия. Таким образом, основываясь на этих редуцированных уравнениях и используя анализ устойчивости в линейном приближении, удаётся привести убедительные аргументы в пользу того, что в ходе динамики память о начальном состоянии теряется и $Q(t, \alpha) \rightarrow Q(t)$. После того как вспомогательный параметр порядка $Q(t, \alpha)$ сошёлся к $Q(t)$, динамика популяции фазовых осцилляторов

Рукопись получена: 18.05.2023

Рукопись одобрена: 26.11.2023

Опубликована online: 20.01.2024

с разбросом фазовых сдвигов сводится к одному динамическому уравнению для величины $Q(t)$, с которой исходные параметры порядка связаны через круговые моменты плотности распределения $g(\alpha)$ величины α .

Все теоретические выводы подтверждаются численными расчётами, выполненными непосредственно в рамках рассматриваемых моделей популяций глобально связанных осцилляторов.

Ключевые слова: синхронизация; коллективные моды; популяция нейронов; глобальная связь; модель Курамото–Сакагучи; распределённые фазовые задержки.

Как цитировать:

Смирнов Л.А., Пиковский А.С. Динамика популяций глобально связанных осцилляторов с распределёнными фазовыми сдвигами // Гены и клетки. 2023. Т. 18, № 4. С. 886–889. DOI: <https://doi.org/10.17816/gc623518>

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-12-00348).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

* Л.А. Смирнов; адрес: Российская Федерация, 603022, Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23; e-mail: smirnov.lev.al@gmail.com

DOI: <https://doi.org/10.17816/gc623518>

Dynamics of oscillator populations globally coupled with distributed phase shifts

L.A. Smirnov^{1*}, A. Pikovsky²

¹ Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation;

² Department of Physics and Astronomy, University of Potsdam, Golm (Potsdam), Germany

ABSTRACT

Globally coupled populations of oscillators are exemplary models for synchronization and the emergence of collective modes. In many cases, the nature of the global coupling is predetermined by the setup. Nevertheless, the oscillators can possess distinct properties and intrinsic noise, leading to non-identity of the system elements. The variation in natural frequencies among the oscillators is the primary source of non-identity. This feature has already been extensively studied. Our research focuses on the impact of phase shift coupling disorder. These phase lags naturally occur where the global force must propagate to reach spatially distributed elements of the population.

First, we develop a phase model in the Kuramoto–Sakaguchi form for a group of quadratic integrate-and-fire neurons that are inter-connected by a synaptic current transmitted with different time delays. This occurs when each cell receives input from other cells of the ensemble with an inherent delay. From a mathematical perspective, a global force affects oscillators with different time delays, resulting in a spread of phase lags in the corresponding phase model. Assuming a weak interaction between system units, we transform to slow-varying phases and use the standard time-average procedure.

Secondly, we demonstrate that a distribution of phase shifts in coupling may result from local oscillator properties, particularly when synaptic coupling of neurons incorporates a “low-pass filter” of an incoming, globally averaged synaptic field. For this purpose, we examine the classic θ -neuron model, which is frequently used to analyze the collective dynamics of a Type I neuron population. Here, we posit that neurons interact through chemical synapses, with each corresponding synaptic current forcing on the neuron satisfying the relaxation equation while having an individual, disordered value of the relaxation constant. Under this assumption of weak coupling and through the use of multiple timescale analysis, we obtain the Kuramoto–Sakaguchi model of phase oscillators which exhibit distributed phase lags.

Next, we will consider the characteristics of the phase model. In the thermodynamic limit, the one-particle probability density function characterizes the continuum of phase oscillators. It evolves according to the continuity equation and possesses an exact solution in the Ott–Antonsen ansatz form at each α phase lag value. This manifold is attractive and represents a special ansatz for the expansion of a Poisson kernel in a Fourier series with respect to the phase variable, as demonstrated in other papers. Using this analytical approach, we obtain a low-dimensional depiction of the collective behavior of the system, which indicates that in the equations for macroscopic complex fields, the redefined order parameter $Q(t, \alpha)$ depends solely on the phase shifts α through the initial conditions. However, its dynamics remain independent. Using stability analyses in the linear approximation and reduced equations, we argue that during the dynamics process, the memory of the initial state is lost and $Q(t, \alpha) \rightarrow Q(t)$. After $Q(t)$ converges, the population dynamics with a distribution of phase shifts reduces to a single dynamical equation for the auxiliary order parameter $Q(t)$, and the original order parameters are connected to it through circular moments of the phase shift distribution $g(\alpha)$.

All theoretical concepts are confirmed through numerical calculations performed directly within the oscillatory population models under consideration.

Keywords: synchronization; collective modes; neuron population; global coupling; Kuramoto–Sakaguchi model; distributed phase lags.

To cite this article:

Smirnov LA, Pikovsky A. Dynamics of oscillator populations globally coupled with distributed phase shifts. *Genes & cells*. 2023;18(4):886–889. DOI: <https://doi.org/10.17816/gc623518>

Received: 18.05.2023

Accepted: 26.11.2023

Published online: 20.01.2024

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors made a substantial contribution to the conception of the work, acquisition, analysis, interpretation of data for the work, drafting and revising the work, final approval of the version to be published and agree to be accountable for all aspects of the work.

Funding sources. This study was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 22-12-00348).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

REFERENCES

* L.A. Smirnov; address: 23 Gagarin avenue, 603022 Nizhny Novgorod, Russian Federation; e-mail: smirnov.lev.al@gmail.com